Exercice 43

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \leq 1 \\ \dfrac{3}{2-x} & x > 1 \end{cases}$$

Calculer $f'(1)$ en utilisant la définition de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Mais $f(x)$ a différentes expressions à gauche et à droite de 1

Donc on va calculer les limites quand h tend vers 0 à gauche et à droite

$$f(1) = 3 \cdot 1 = 3$$

tend vers 1 à gauche

- $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{3(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{3} + 3h - \cancel{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0^-} 3 = 3$$

tend vers 1 à droite

- $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{3}{2-(1+h)} - 3}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{3}{2-(1+h)} - 3 \right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{3}{2-1-h} - 3 \right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left(\frac{3}{1-h} - 3 \right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left(\frac{3}{1-h} - \frac{3(1-h)}{1-h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left(\frac{3 - 3 + 3h}{1-h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\cancel{h}} \left(\frac{3\cancel{h}}{1-h} \right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{3}{1-h}$$

$$= \frac{3}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$$

Vu que $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 3$

alors $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 3$

$\boxed{X}$

⚠ si les limites à gauche et à droite étaient différentes, $f'(1)$ ne serait pas défini

Question 44

soit $f(x) = \sqrt{x-4}$, $x \geq 4$

Trouver $f'(x)$ en utilisant la définition de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-4} - \sqrt{x-4}}{h}$$

$h \to 0$, on ne peut pas divisor par 0

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-4} - \sqrt{x-4}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}}{\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h-4}\right)^2 - \left(\sqrt{x-4}\right)^2}{h\left[\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}\right]} \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-4 \overbrace{-(x-4)}^{-x+4}}{h\left(\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 + \cancel{h} + 0}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-4} + \sqrt{x-4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\underbrace{x+0-4}_{x-4}} + \sqrt{x-4}}$$

$$\boxed{F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}}}$$

Question 45

Trouver l'équation de la droite tangente à

$$y = \frac{x}{x-1} + \frac{2}{3}(7+x)^{3/2} = f(x)$$

lorsque $x = 2$

Rappel: Eq de la tangente à f au point a est

$$y = \underbrace{m}_{= f'(a)} x + b$$

On va d'abord trouver $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)' + \frac{2}{3}\left((7+x)^{3/2}\right)'$$

$$= \frac{(x)'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} + \underbrace{\frac{2}{3}\cdot\Big(\frac{3}{2}}_{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1}\cdot(7+x)'(7+x)^{\frac{3}{2}-1}\Big)$$

$$= \frac{x-1-x\cdot 1}{(x-1)^2} + 1\cdot(7+x)^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + (7+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{-1}{\underbrace{(2-1)^2}_{1}} + \underbrace{(7+2)}_{3}^{1/2}$$

$$= -1 + \sqrt{9} = -1 + 3 = 2 \leftarrow m$$ (pente de la tangente au point $x = 2$)

Eq tangente $y = 2 \cdot x + \underbrace{b}_{!}$

le point $(2, \underbrace{f(2)}_{!})$ appartient à la droite

$$f(2) = \frac{2}{2-1} + \frac{2}{3} \cdot (7+2)^{3/2}$$

$$= 2 + \frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} = 2 + \frac{2}{3} \cdot (\underbrace{9^{1/2}}_{\sqrt{9} = 3})^3$$

$$= 2 + \frac{2}{3} \cdot 3^3 = 2 + 2 \cdot 3^2 = 2 + 2 \cdot 9 = 2 + 18$$

$f(2) = 20$

Donc $(\underbrace{2}_{x}, \underbrace{20}_{y})$ appartient à la droite

$\Rightarrow 20 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 20 - 2 \cdot 2 = 20 - 4 = 16$

$\rightarrow$ l'équation de la tangente est $\boxed{y = 2x + 16}$

Question 46

Calculer la dérivée de $y = \sqrt[3]{1+x+x^2}$

$y = (1+x+x^2)^{1/3}$ $\qquad \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n\, f'(x)\,(f(x))^{n-1}$$

donc,

$$\frac{d}{dx} y = \frac{1}{3} \cdot (1+x+x^2)' \, (1+x+x^2)^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (0+1+2x)\,(1+x+x^2)^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}$$

$$= \frac{1+2x}{3} \cdot (1+x+x^2)^{-2/3}$$

$$= \boxed{\frac{1+2x}{3(1+x+x^2)^{2/3}}}$$

$$\left(x^{-a} = \frac{1}{x^a} \right.$$

$$\rightarrow (1+x+x^2)^{-2/3}$$

$$\left. = \frac{1}{(1+x+x^2)^{2/3}} \right)$$

Question 47

Calculer la dérivée de $y = \sqrt{2x - x^2}$

$y = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $(\sqrt{x} = x^{1/2})$

$$\frac{d}{dx} (F(x))^n = n \, F'(x) \, (F(x))^{n-1}$$

$$y' = \frac{1}{2} (2x - x^2)' \, (2x - x^2)^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} (2 - 2x) \, (2x - x^2)^{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} (2-2x)(2x-x^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(1-x) \quad (2x-x^2)^{-1/2}$$

$$= (1-x) \cdot (2x-x^2)^{-1/2}$$

$$y' = \frac{1-x}{(2x-x^2)^{1/2}} \qquad \left(x^{-a} = \frac{1}{x^a} \right)$$

Question 48

Calculer la dérivée (vitesse) d'un objet se déplaçant selon

$$s(t) = \sqrt{\frac{t+1}{17t}}$$

$$s(t) = \left(\frac{t+1}{17t}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow s'(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t+1}{17t}\right)' \left(\frac{t+1}{17t}\right)^{1/2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{(t+1)' \, 17t - (t+1)(17t)'}{(17t)^2}}_{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}} \right) \cdot \left(\frac{t+1}{17t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 \cdot 17t - (t+1) \cdot 17}{(17t)^2} \right) \cdot \left(\frac{t+1}{17t} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$s'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{17t - 17(t+1)}{(17t)^2} \right) \cdot \left(\frac{t+1}{17t} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\boxtimes$